377. 有限個領域ニ於ケル函數ノ Erzeugung ニ就イテ

伊藤誠, 内藤實 (御影師範)

角谷氏ガ第62号229ニ於イテ変域モ値域モ有限個領域 $\{0, 1, 2, \cdots\cdots, n\}$ デアル任意ノ函數 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots x_p)$ ガ或ル一ツノ二変数ノ函数ヲ何回カ *iterieren* スルコトニヨリ *erzeugen* サレ得ルコトヲ証明サレタ。其ノ後、既ニ1935年5月ノ *Am. National Acad. of Science* 上デ米國ノ *Webb* ガソレト異ナル函数ニヨッテ同様ノコトヲ論ジテキルノヲ見タ。然シ其ノ論文ハ、記号ソノ他ノ点デ多少理解シ難イ感ジガスルノデ其等ヲ書キ改ヘテ、次ニ御紹介シタイト思フ。

次ノ表ニヨッテ定義サレル函数ヲ $\varphi(x, y)$ トス。(空白ノ部分ノ数字ハ0トス)

$\longrightarrow y$

$\downarrow x$

φ	0	1	2	---	---	$n-1$	n
0	1	0	---	---	---	---	---
1	0	2	0	---	---	---	---
2	⋮	0	3	⋱			
⋮	⋮	⋮	0	⋱	⋱		
⋮	⋮	⋮	⋮	0	⋱	0	
$n-1$	⋮	⋮	⋮	⋮	0	n	0
n	0	⋮	⋮	⋮		0	0

$g_1(x) = \varphi(x, x) \equiv x+1 \pmod{\nu = n+1}$ デアルカラ $g_1(x)$ ヲ iterieren スルコトニヨリ $g_h(x) = x+h$ ハ $\varphi(x, y)$ ニヨツテ erzeugen サレル。又 $g_{n-h}(x) = g_{-h}(x)$ トス。

函数 $R^i_{\lambda,\mu}(x, y)$ ヲ次ノ如ク定義シ、$R^i_{\lambda,\mu}$ ト略記ス。

$$R^i_{\lambda,\mu}(x,y) = i,\quad x = \lambda,\ y = \mu \text{ ナルトキ}$$

$$R^i_{\lambda,\mu}(x,y) = 0,\quad x \neq \lambda \text{ or } y \neq \mu \text{ ナルトキ}$$

然ラバ

$$R^0_{\lambda,\mu} = \varphi(x, g_1(x)) = 0$$

$$R^1_{\lambda,\mu} = \varphi\{g_{-1}[\varphi(g_{-\lambda}(x), g_{-\mu}(y))], \varphi(x, g_1(x))\}$$

何故ナラバ

$$\text{右辺} = \varphi\{g_{-1}[\varphi(x-\lambda, y-\mu)], 0\}$$

$x = \lambda,\ y = \mu$ ノトキ $g_{-1}[\varphi(x-\lambda, y-\mu)] = g_{-1}(\varphi(0,0)) = 0$

$$\therefore\ \text{右辺} = \varphi\{0, 0\} = 1$$

$x \neq \lambda$ or $y \neq \mu$ ノトキ $\varphi(x-\lambda, y-\mu) \neq 1$ トナリ

$$g_{-1}[\varphi(x-\lambda, y-\mu)] \neq 0$$

$$\therefore\ \text{右辺} = 0$$

次ニ

$$R^i_{\lambda,\mu} = \varphi\{g_{i-2}(R^1_{\lambda,\mu}),\ g_{i-1}(R^0_{\lambda,\mu})\}$$

何故ナラバ

$$\text{右辺} = \varphi\{g_{i-2}(R^1_{\lambda,\mu}),\ i-1\}$$

$x=\lambda,\ y=\mu$ ナルトキ 右辺$=\varphi\{g_{i-2}(1),\ i-1\}=i$

$x\neq\lambda$ or $y\neq\mu$ ナルトキ $R'_{\lambda,\mu}\neq 1$ トナリ

$$g_{i-2}(R'_{\lambda,\mu})\neq i-1$$

$\therefore$ 右辺$=0$

故ニ $R^{i}_{\lambda,\mu},\ (i=0,1,2,\text{------},n)$ ハ $\varphi(x,y)$ ヲ有限回 iterieren スルコトニヨッテ erzeugen スルコトが出来ル。

$$\delta(x,y)=\varphi(x,\ g_n(y))$$

$$\alpha_i(x,y)=\delta(N_{i-1},\ g_1(M_{i-1}))$$

$$(i=1,2,\text{---------},n)$$

$$M_0=R^{0}_{0,0},\quad M_k=\alpha_k\left(M_{k-1},\ \alpha_k(R^{k}_{0,k+1},\ R^{k}_{k+1,0})\right)$$

$$N_0=R'_{0,0},\quad N_k=\alpha_k(M_k,\ N_0)$$

ト定義スレバ，$\delta(x,y)$ ハ次ノ表デ與ヘラレル。

$\longrightarrow y$

$x \downarrow$

$\delta(x,y)$	0	1	2	------	$n-1$	n
0		1	0			
1		0	2			
2						
⋮					0 $n-1$	 0
$n-1$						n
n	0	0				

次ニ函数 $\alpha_n(x,y)$ ガ次ノ表ニヨツテ表ハサレルコトヲ証明シヨウ。

$\longrightarrow y$

α_n	0	1	2	------------	n
0	0	1	2	------------	n
1	1	1	1		
2	2	1			
⋮	⋮			1	
n	n				

$\downarrow x$

即チ
$x=0$ or $y=0$
ナルトキ
$\alpha_n(x,y)=x+y$

(証明) $i=1$ ナルトキ

$$\alpha_1(x,y)=\delta(N_0\ \ g_1(M_0))$$

$$M_0=R^0_{0,0}\qquad N_0=R^1_{0,0}$$

ヨリ

$\longrightarrow y$

α_1	0	1	2	----------- n
0	0	1	1	----------- 1
1	1	1	1	
2	1	1	1	
⋮	⋮			1
n	1			

$\downarrow x$

$i = 2$ ナルトキ

$$\alpha_2(x\,y) = \delta(N_1,\ g_1(M_1)),$$

$$M_0 = R^0_{0,0} \qquad M_1 = \alpha_1\,(M_0, \alpha_1\,(R'_{0,2},\ R'_{2,0}))$$

$$N_0 = R'_{0,0} \qquad N_1 = \alpha_1\,(M_1, N_0)$$

$\longrightarrow y$; $\downarrow x$

M_1	0	1	2	⋯	n
0	0	0	1	0	
1	0	0			
2	1				
⋮	0		0		
n					

$\longrightarrow y$; $\downarrow x$

N_1	0	1	2	⋯	n
0	1	0	1	0	
1	0	0			
2	1				
⋮	0		0		
n					

$g_1(M_1)$	0	1	2	⋯	n
0	1	1	2	1	
1	1	1			
2	2				
⋮	1		1		
n					

$\longrightarrow y$; $\downarrow x$

α_2	0	1	2	⋯	n
0	0	1	2	1	
1	1	1			
2	2				
⋮	1		1		
n					

$i = m$ ナルトキ $\alpha_m(x, y)$, M_{m-1}, N_{m-1} ガ夫々次表ノ如ク表ハサレルト假定スレバ

α_m	0	1	2	$\cdots$	m	$\cdots$	n
0	0	1	2	$\cdots$	m	1	$\cdots$
1	1	1					
2	2						
$\vdots$	$\vdots$				1		
m	m						
$\vdots$	1						
n	$\vdots$						

M_{m-1}	0	1	2	$\cdots$	m	$\cdots$	n
0	0	0	1	2 $\cdots$	$m-1$	0	$\cdots$
1	0	0					
2	1						
$\vdots$	2				0		
$\vdots$	$\vdots$						
m	$m-1$						
$\vdots$	0						
n	$\vdots$						

N_{m-1}	0	1	2	$\cdots$	m	$\cdots$	n
0	1	0	1	2 $\cdots$	$m-1$	0	$\cdots$
1	0	0					
2	1				0		
$\vdots$	2						
$\vdots$	$\vdots$						
m	$m-1$						
$\vdots$	0						
n	$\vdots$						

$$\alpha_{m+1}(x, y) = \delta(N_m,\ g_1(M_m))$$

$$M_m = \alpha_m\left(M_{m-1},\ \alpha_m\left(R^m_{0,m+1},\ R^m_{m+1,0}\right)\right)$$

$$N_m = \alpha_m(M_m, N_0)$$

ヨリ

$\alpha_m(R^m_{0,m+1}, R^m_{m+1,0})$

	0	1	2	⋯	$m+1$	⋯	n
0					m		
1							
2							
⋮				0			
$m+1$	m						
⋮							
n							

M_m	0	1	2	⋯	$m+1$	⋯	n
0	0	0	1	2 ⋯	m	0 ⋯	⋯
1	0						
2	1						
⋮	2			0			
⋮	⋮						
$m+1$	m						
⋮	0						
n	⋮						

N_m	0	1	2	3	⋯	$m+1$	⋯	n
0	1	0	1	2	⋯	m	0 ⋯	⋯
1	0							
2	1							
3	2							
⋮	⋮				0			
$m+1$	m							
⋮	0							
n	⋮							

$g_1(M_m)$	0	1	2	3	⋯	$m+1$	⋯	n
0	1	1	2	3	⋯	$m+1$	1 ⋯	⋯
1	1							
2	2							
3	3							
⋮	⋮				1			
$m+1$	$m+1$							
⋮	1							
n	⋮							

α_{m+1}	0	1	2	3	⋯	$m+1$	⋯	n
0	0	1	2	3	⋯	$m+1$	1 ⋯	⋯
1	1							
2	2							
3	3							
⋮	⋮				1			
$m+1$	$m+1$							
⋮	1							
n	⋮							

故ニ數學的歸納法ニヨツテ $\alpha_i(x, y)$ $(i=3, 4, \cdots\cdots, n)$ ヲ定

メル表ヲ知ルコトガ出來 $i=n$ トスレバ α_n ノ表ガ求メラレル。

サテ同ジ領域デ任意ニ與ヘラレタ函數 $f(x, y)$ ガ次ノ表ニヨツテ定義サレテヰルトキ

$f(x,y)$	0	1	2	…………	n
0	$t_{0,0}$	$t_{0,1}$	$t_{0,2}$	…………	$t_{0,n}$
1	$t_{1,0}$	$t_{1,1}$	$t_{1,2}$	…………	$t_{1,n}$
2	$t_{2,0}$	$t_{2,1}$	$t_{2,2}$	…………	$t_{2,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
n	$t_{n,0}$	$t_{n,1}$	$t_{n,2}$	…………	$t_{n,n}$

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = & R_{0,0}^{t_{0,0}} + R_{0,1}^{t_{0,1}} + R_{0,2}^{t_{0,2}} + \cdots\cdots + R_{0,n}^{t_{0,n}} \\
& + R_{1,0}^{t_{1,0}} + R_{1,1}^{t_{1,1}} + R_{1,2}^{t_{1,2}} + \cdots\cdots + R_{1,n}^{t_{1,n}} \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& + R_{n,0}^{t_{n,0}} + R_{n,1}^{t_{n,1}} + R_{n,2}^{t_{n,2}} + \cdots\cdots + R_{n,n}^{t_{n,n}}
\end{aligned}
$$

トナリ $f(x, y)$ ハ $\alpha_n(x, y)$ ト $R_{0,0}^{t_{0,0}}, R_{0,1}^{t_{0,1}}, \cdots\cdots$ 等ニヨツテ表ハシ得ル。即チ $f(x, y)$ ハ $\varphi(x, y)$ ヲ有限回 *iterieren* スルコトニヨツテ表ハシ得ル。

次ニ第62号228ニ於テ定義シタ函數

$$\psi_1(x, y) \qquad \psi_2(x, y)$$

$$f_k(x) \equiv k \qquad (k = 0, 1, \cdots\cdots, n)$$

$$\sigma(x, \lambda) \qquad (\lambda = 0, 1, \cdots\cdots, n)$$

ハ総テ $\varphi(x, y)$ ヲ有限回 *iterieren* スルコトニヨッテ表ハサレ得ル。

（証明）　二変数函數 $\psi_1(x, y)$ が $\varphi(x, y)$ ニヨッテ表ハサレルコトハ既ニ証明シタ。$\psi_2(x, y) = \alpha_n(x, y)$。

$f_0(x) = \varphi(x, g(x))$,　$f_k(x) = g(f_{k-1}(x))$,　$(k = 1, \cdots\cdots, n)$。

$\sigma(x, \lambda) = \varphi(f_0(x), g_{-\lambda}(x))$,　$(\lambda = 0, 1, \cdots\cdots, n)$

故ニ第62号228ノ定理ニヨッテ任意ノ函数 $f(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ が $\varphi(x, y)$ ヲ何回カ *iterieren* スルコトニヨッテ表ハサレ得ルコトが証明出来タ。